Ejercicios de Análisis Matemático
Derivadas 2 - Soluciones

Ejercicio 1. Prueba que para todo $x > -1$ se verifica que

$$\frac{x}{x+1} \leqslant \log(1+x). \tag{1}$$

¿Cuándo se da la igualdad?

Solución. Definamos la función $h:]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ por:

$$h(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

Se trata de probar que $h(x) \geqslant 0$ para todo $x > -1$. Como, evidentemente, $h(0) = 0$, deberemos probar que la función h tiene un mínimo absoluto en 0. La derivada de h viene dada por:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

Deducimos que:

$$\begin{array}{l} -1 < x < 0 \Longrightarrow h'(x) < 0 \Longrightarrow h \downdownarrows \ \text{en }]-1, 0] \Longrightarrow h(x) > h(0) = 0 \\ 0 < x \Longrightarrow h'(x) > 0 \Longrightarrow h \upuparrows \ \text{en } [0, +\infty[\Longrightarrow 0 = h(0) < h(x) \end{array}$$

Hemos probado así que $h(x) > 0$ para todo $x > -1$ con $x \neq 0$. Es decir, la desigualdad (1) es cierta de forma estricta para todo $x > -1$ y la igualdad se da solamente para $x = 0$. ☺

Comentarios. Creo que es un ejercicio muy elemental y sencillo que se hace siguiendo la estrategia descrita en el libro de Cálculo Diferencial (página 226), estrategia que se comentó en clase. Un fallo frecuente es usar la derivada segunda para probar que hay un mínimo absoluto en 0 comprobando que $h''(0) > 0$. Eso solamente prueba que en 0 hay un extremo relativo, no absoluto. Para probar que en un punto se alcanza un máximo o un mínimo absolutos lo que suele hacerse es estudiar la variación en el signo de la derivada primera (tal como se indica en la Proposición 6.23 del libro citado antes). También puede usarse el siguiente resultado que te propongo como ejercicio.

Ejercicio. *Sea f derivable en un intervalo I y supongamos que tiene un máximo relativo en un punto $a \in I$ y que a es el único punto crítico de f en I. Entonces se verifica que f alcanza en a un máximo absoluto en I.*

Otro error frecuente consiste en creer que la derivación conserva las desigualdades, es decir, que si $f(x) \leqslant g(x)$ entonces debe ser $f'(x) \leqslant g(x)$. Esto es tanto como afirmar que si una función es positiva su derivada tiene que ser también positiva. Este ejercicio prueba que eso no tiene por qué ser así pues, aunque $h(x) \geqslant 0$ para todo $x > -1$, no se verifica que $h'(x) \geqslant 0$ para todo $x > -1$. Esto es evidente si se piensa un poco: la derivada no tiene nada que ver con lo grande o pequeña que sea una función, sino con su tasa de variación, esto es, con lo rápido que aumenta o disminuye, en una palabra, es la pendiente en todo punto de la gráfica de la función. Una función puede ser positiva y su gráfica tener pendiente negativa en todos sus puntos. Cualquier función decreciente y positiva sirve de ejemplo ($f(x) = \mathrm{e}^{-x}$).

Errores de cálculo que se repiten: afirmar que la derivada de $\log(1+x)$ es $1/x$ o, mucho peor, que es $1/\log(1+x)$. Muchos errores son debidos a no simplificar la derivada dejándola en la forma:

$$h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Eso es difícil de entender.

Ejercicio 2. Estudia el número de ceros reales de la función $f(x) = 2^x - 1 - x^2$.

Solución. Naturalmente, debemos considerar la función definida en $\mathbb{R}$. Con ver la función se da uno cuenta de que $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$. Ya tenemos dos ceros. Para $x < 0$ es $2^x < 1$ por lo que $f(x) < 0$. Es evidente que para valores grandes de x la función es positiva, por ejemplo $f(5) = 2^5 - 1 - 5^2 = 6$. Podemos sospechar que tome valores negativos entre 1 y 5, pero esto se comprueba enseguida porque $f(2) = 2^2 - 1 - 4 = -1 < 0$. Deducimos, por el teorema de Bolzano, que la función f se anula en algún punto del intervalo $]2, 5[$. Hemos encontrado tres ceros de la función y es razonable sospechar que no haya más. La derivada puede ayudarnos a salir de dudas, pues, por el teorema de Rolle, sabemos que si la derivada de una función tiene k ceros la función como mucho puede tener $k + 1$ ceros (puede que no tenga ninguno). Tenemos que:

$$f'(x) = 2^x \log 2 - 2x.$$

Podríamos estudiar los ceros de la derivada pero parece más fácil considerar la derivada segunda:

$$f''(x) = 2^x (\log 2)^2 - 2.$$

Como la exponencial $x \mapsto 2^x$ es estrictamente creciente, es claro que la derivada segunda es una función estrictamente creciente y, por tanto, puede tener a lo más un cero (de hecho, es inmediato calcular el único punto donde se anula pero no es necesario). Se sigue que la derivada primera no puede tener más dos ceros (de hecho, los tiene pero eso no interesa). Concluimos que la función dada no puede tener más de tres ceros y, por tanto, que tiene exactamente tres ceros. ☺

Comentarios. Muchos calculáis los ceros de la derivada usando un programa de cálculo (¿quizás *Mathematica*?). Nada que objetar. Ya he dicho que no tengo nada en contra de eso, pero debes saber interpretar los resultados y no hacer razonamientos generales basándote en un caso particular. Por ejemplo, no debes creer que una función tiene que ser positiva en un máximo relativo y negativa en un mínimo relativo. Está claro que eso, en general, no tiene por qué ser así (considera las funciones $\operatorname{sen} x \pm 3$). Todavía más inapropiado es razonar en este ejercicio basándose en propiedades de convexidad porque eso nada tiene que ver con lo que se pregunta.

Observa que la información sobre los ceros de la derivada nos dice el número máximo de ceros que puede tener la función pero no nos dice si de hecho la función tiene o no tiene ceros ni cuántos tiene, para eso hay que usar el teorema de Bolzano.

Sabemos que los ceros complejos de una función polinómica con coeficientes reales vienen por parejas (cada raíz compleja con su conjugada), y de ahí, junto con el hecho de que toda función polinómica de grado impar tiene al menos un cero, se deducen algunas consecuencias útiles para estudiar los ceros de una función polinómica, pero es un disparate tratar de aplicar esto a funciones que no son polinómicas como la de este ejercicio.

Ejercicio 3. Calcula los límites siguientes.

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)} \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen} x^2)}{(\mathrm{e}^{2x}-1)\log(1+2x)}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{3\operatorname{sen} x - 3x\cos x}{x^3}\right)^{1/x} \qquad f)\ \lim_{x\to +\infty} \left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

Solución.

a) Se trata de una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y puede usarse la regla de L'Hôpital (son funciones derivables y la derivada del denominador no se anula) pero podemos ahorrarnos trabajo si, antes de aplicar dicha regla, usamos la equivalencia asintótica $\log(1 + x) \sim x$ $(x \to 0)$. Tenemos así:

$$\frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{(\log(1+x))^2} \sim \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2} \tag{2}$$

Ahora aplicamos la *regla salvadora*, derivamos numerador y denominador, y tenemos que calcular el límite para $x \to 0$ de la función:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} x}\,\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2x^3} \sim \frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2x^3}.$$

Donde hemos usado la equivalencia asintótica $\operatorname{sen} x \sim x$ $(x \to 0)$ para ahorrarnos trabajo. Todo lo que tenemos que hacer ahora es calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2x^3} = (\textit{la santa regla}) = \lim_{x\to 0}\frac{-x\operatorname{sen} x}{6x^2} = \frac{-1}{6}$$

La última igualdad es inmediata y sería locura usar otra vez *La Regla* para calcular el último límite. También, recordando los *límites que debes saberte de memoria*, podríamos haber hecho lo que sigue:

$$\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{2x^3} = \frac{x(\cos x - 1) + x - \operatorname{sen} x}{2x^3} = \frac{\cos x - 1}{2x^2} + \frac{x - \operatorname{sen} x}{2x^3} \to \frac{-1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{-1}{6}$$

También podemos usar en (2) la equivalencia asintótica $\log(h(x)) \sim h(x) - 1$ $(x \to 0)$ cuando $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 1$, con lo que resulta:

$$\frac{\log\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{x^2} \sim \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - 1}{x^2} = \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$$

con lo que el límite pedido vuelve a ser, mira por dónde, un *límite bien conocido*.

b) Puesto que $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$, se trata de una indeterminación del tipo 1^∞. Según la regla de equivalencia logarítmica:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2} = \mathrm{e}^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1\right) = L.$$

Tenemos que:

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} - 1\right) = \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

Resulta que este es otro de los *límites que debes saber de memoria* y es igual a $\frac{1}{3}$. Aunque también resulta ser igual a un límite calculado arriba:

$$\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = -\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3\cos x} \sim -\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^3} \to \frac{1}{3}.$$

Concluimos que el límite pedido es igual a $\sqrt[3]{\mathrm{e}}$.

c) Este límite es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y el Santo Marqués de L'Hôpital viene en nuestra ayuda.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{1 - \cos x + x\operatorname{sen} x}$$

La mayoría de vosotros volvería a aplicar otra vez *La Única Regla* y derivaría el numerador y el denominador tal y como están. Pues eso es justo lo que jamás debes hacer. ***Hay que simplificar antes de derivar***.

$$\frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{1 - \cos x + x\operatorname{sen} x} = \frac{1}{1+x^2}\,\frac{1 - \cos x - x^2\cos x}{1 - \cos x + x\operatorname{sen} x} \sim \frac{1 - \cos x - x^2\cos x}{1 - \cos x + x\operatorname{sen} x}$$

Donde hemos usado la evidente equivalencia asintótica $\frac{1}{1+x^2} \sim 1$ $(x \to 0)$. Después de simplificar vemos que podemos aplicar *Lo Único*. Derivamos numerador y denominador y obtenemos:

$$\frac{\operatorname{sen} x + x^2\operatorname{sen} x - 2x\cos x}{2\operatorname{sen} x + x\cos x}$$

El límite de esta función para $x \to 0$ sigue siendo del tipo $\frac{0}{0}$ y podemos volver a derivar numerador y denominador, pero no es preciso porque dividiendo por x numerador y denominador se tiene que:

$$\frac{\operatorname{sen} x + x^2 \operatorname{sen} x - 2x \cos x}{2 \operatorname{sen} x + x \cos x} = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} + x \operatorname{sen} x - 2 \cos x}{2\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x} \longrightarrow -\frac{1}{3}$$

También podríamos haberlo hecho sin derivar tanto. Basta recordar que $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $(x \to 0)$ (es otro de los *límites que debes saberte de memoria*). Tenemos que:

$$\frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)} \sim 2\frac{\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3} = 2\frac{\operatorname{arc\,tg} x - x}{x^3} + 2\frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} \tag{3}$$

Sabemos (espero que alguna vez lo aprendas) que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$. Queda calcular el otro límite. Usando, una vez más, la *Regla Universal*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2}$$

La mayoría de vosotros volvería a aplicar otra vez *La Única Santa Regla* y derivaría el numerador y el denominador tal y como están. Pues eso es justo lo que jamás debes hacer. ***Hay que simplificar antes de derivar***.

$$\frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} = \frac{-1}{3(1+x^2)} \longrightarrow -\frac{1}{3}$$

Teniendo en cuenta la igualdad (3), deducimos que el límite pedido es igual a $-2\dfrac{1}{3} + 2\dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{3}$.

d) Para hacer este límite conviene mandar a paseo al *ubicuo marqués* y usar algunas *conocidas equivalencias asintóticas*. Sabemos que si $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ se verifican las siguientes equivalencias asintóticas para $x \to 0$:

$$\operatorname{arc\,tg}(f(x)) \sim f(x), \quad \operatorname{arc\,sen}(f(x)) \sim f(x), \quad \log(1 + f(x)) \sim f(x), \quad \mathrm{e}^{f(x)} - 1 \sim f(x).$$

Teniendo en cuenta que podemos sustituir equivalencias asintóticas en un producto, deducimos que:

$$\frac{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,sen} x^2)}{(\mathrm{e}^{2x} - 1)\log(1+2x)} \sim \frac{\operatorname{arc\,sen} x^2}{(2x)(2x)} \sim \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

Por tanto el límite pedido es igual a $\dfrac{1}{4}$.

e) Se trata de un límite del tipo $\lim\limits_{x\to 0} u(x)^{v(x)}$ donde:

$$u(x) = \frac{3 \operatorname{sen} x - 3x \cos x}{x^3}, \quad v(x) = \frac{1}{x}$$

Empezaremos calculando $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$. Como es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, usando la RUPCL (Receta Universal Para Calcular Límites) tenemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3 \operatorname{sen} x - 3x \cos x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2} = 1.$$

En consecuencia, el límite pedido es una indeterminación del tipo 1^∞. Usamos el criterio de equivalencia logarítmica y tenemos que:

$$v(x)(u(x) - 1) = \frac{1}{x}\left(\frac{3 \operatorname{sen} x - 3x \cos x}{x^3} - 1\right) = \frac{3 \operatorname{sen} x - 3x \cos x - x^3}{x^4}$$

Podemos ahora usar una vez más *Lo Mismo*. Derivando numerador y denominador resulta:

$$\frac{3x \operatorname{sen} x - 3x^2}{4x^3} = \frac{3}{4}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} \longrightarrow 0.$$

Concluimos que $\lim\limits_{x\to 0} u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^0 = 1$.

f) Se trata de un límite del tipo $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)^{v(x)}$ donde:

$$u(x) = x \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad v(x) = x^2.$$

Tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

En consecuencia, el límite pedido es una indeterminación del tipo 1^∞. Usamos el criterio de equivalencia logarítmica y tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(x \operatorname{sen}\frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Concluimos que $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{-1/6}$. ☺

Comentarios. Hay errores de todo tipo. Los principales son debidos a que no simplificáis antes y después de aplicar la regla de L'Hôpital. Por supuesto, hay quien aplica la regla sin pararse a comprobar que puede hacerlo, es decir, que el límite en cuestión es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Ese es un error típico. Otro error muy frecuente es sustituir en una suma una función por otra asintóticamente equivalente. Lo hemos repetido muchísimas veces: eso no puede hacerse, ***no se puede sustituir una función por otra asintóticamente equivalente en una suma***, eso solamente puede hacerse cuando la función multiplica o divide a todas las demás. Por ejemplo, sabemos que $\log(1+x) \sim x$ para $x \to 0$, pero no es verdad que $\operatorname{sen} x - \log(1+x) \sim \operatorname{sen} x - x$ para $x \to 0$; de hecho se tiene que $\operatorname{sen} x - \log(1+x) \sim x^2/2$. Tampoco pueden sustituirse equivalencias asintóticas en funciones, es decir, si $\alpha(x) \sim \beta(x)$ para $x \to a$ y f es una función, no es verdad en general que $f(\alpha(x)) \sim f(\beta(x))$ para $x \to a$. Por ejemplo, las funciones x^2 y $x^2 + x$ son asintóticamente equivalentes para $x \to +\infty$, pero e^{x^2+x} no es asintóticamente equivalente a e^{x^2} para $x \to +\infty$ (su cociente diverge positivamente).

Otro error demasiado frecuente se debe a que descomponéis un límite como suma de varios de cualquier manera. Como norma general, ***nunca descompongas un límite como suma o como producto de otros***, eso solamente puedes hacerlo si sabes que cada una de las funciones en la suma o en el producto tiene límite finito.

Ejercicio 4. Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo equilátero cuyo lado mide 2 centímetros. Se supone que el rectángulo se apoya sobre un lado del triángulo.

Solución. Este ejercicio es tan fácil que no merece la pena detenerse en él.

Ejercicio5. Determina un punto (u, v) $(u > 0, v > 0)$ de la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

tal que la tangente a la elipse en dicho punto determine con los ejes un segmento de longitud mínima.

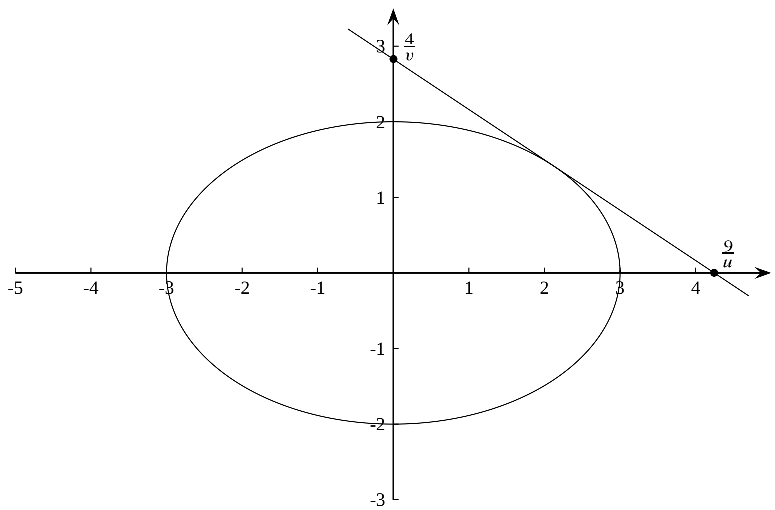
Solución. Sea (u, v) un punto genérico de la elipse con $u > 0, v > 0$. Se verificará que $\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} = 1$, o sea, $4u^2 + 9v^2 = 36$. Calculemos la tangente a la elipse en dicho punto. La función cuya gráfica es la parte superior de la elipse se obtiene despejando y en función de x en la ecuación de la elipse. Obtenemos así la función $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ definida en el intervalo $[-3,3]$. Por tanto será $v=f(u)$. Tenemos que:

$$f'(u)=-\frac{2}{3}\frac{u}{\sqrt{9-u^2}}=-\frac{4}{9}\frac{u}{v}$$

La tangente en (u,v) viene dada por $y-f(u)=f'(u)(x-u)$, es decir:

$$y-v=-\frac{4}{9}\frac{u}{v}(x-u)\iff 9yv-9v^2=-4ux+4u^2\iff 9yv+4ux=36$$

donde hemos usado que $4u^2+9v^2=36$.



Los puntos de corte de la tangente con los ejes son $(0,4/v)$ y $(9/u,0)$ y la longitud del segmento es

$$\sqrt{\frac{81}{u^2}+\frac{16}{v^2}}=\sqrt{\frac{81}{u^2}+\frac{16}{(f(u))^2}}=\sqrt{\frac{81}{u^2}+\frac{36}{9-u^2}}$$

Se trata de calcular el valor mínimo (absoluto) de esta función, para ello es suficiente que calculemos el valor mínimo de la función:

$$h(u)=\frac{81}{u^2}+\frac{36}{9-u^2}\qquad 0<u<3.$$

Tenemos que:

$$h'(u)=-\frac{162}{u^3}+\frac{72u}{(9-u^2)^2}=\frac{-162(9-u^2)^2+72u^4}{u^3(9-u^2)^2}=18\frac{-9^3+2\times 9^2u^2-5u^4}{u^3(9-u^2)^2}$$

Las soluciones de la ecuación $5z^2-2\times 9^2z+9^3=0$ vienen dadas por:

$$\frac{2\times 9^2\pm\sqrt{4\times 9^4-20\times 9^3}}{10}=\frac{6\times 3^3\pm\sqrt{16\times 9^3}}{10}=\frac{6\times 3^3\pm 4\times 3^3}{10}=\begin{cases}27\\ \frac{27}{5}\end{cases}$$

Los puntos críticos de la función h son por tanto $\alpha=\sqrt{\frac{27}{5}}=3\sqrt{\frac{3}{5}}$ y $\beta=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$. El único que está en el intervalo $]0,3[$ es α, por tanto en dicho punto debe alcanzarse el mínimo absoluto de h, pero eso debemos comprobarlo. Estudiaremos el signo de la derivada primera en el intervalo $]0,3[$. Como el denominador de h' es positivo, basta considerar el numerador. Tenemos que:

$$-9^3+2\times 9^2u^2-5u^4=-5(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)=-5(u+\alpha)(u+\beta)(u-\alpha)(u-\beta).$$

Deducimos que para $0 < u < \alpha$ es $h'(u) < 0$ y para $\alpha < u < 3$ es $h'(u) > 0$. Por tanto h es estrictamente decreciente en $]0, \alpha]$ y estrictamente creciente en $[\alpha, 3[$. Concluimos que $h(u) \geqslant h(\alpha)$ para todo $u \in]0, 3[$. Por tanto, el valor mínimo de h se alcanza en α. El valor mínimo de la longitud del segmento de la tangente a la elipse interceptado por los ejes es $\sqrt{h(\alpha)} = 5$. ☺

Comentarios. Fallos elementales al derivar. Mala notación que lleva a confundir unas variables con otras. Fallos elementales de cálculo por no simplificar. Es decir, exactamente los mismos fallos que hubo en el ejercicio análogo a este en la relación primera de derivadas. Uso inapropiado de la derivada segunda cuando lo que se pide es un extremo absoluto.

Ejercicio 6. Calcula los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Solución. El teorema de Weierstrass asegura que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza en puntos de dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos. Sabemos también que si una función tiene un extremo relativo en un punto y es derivable en dicho en punto, se verifica que la derivada se anula en dicho punto. Los extremos absolutos de la función o bien se alcanzan en alguno de los puntos extremos del intervalo o bien son extremos relativos. Por tanto, para calcular los valores máximo y mínimo (se entiende que absolutos) en un intervalo $[a, b]$ de una función continua f, que también suponemos derivable en dicho intervalo salvo quizás en un número finito de puntos del mismo en los que la derivada no existe, lo que se hace es evaluar la función en los puntos del intervalo en los que la derivada existe y vale 0 (los puntos críticos), evaluar la función en los puntos del intervalo en los que la derivada no existe (si es que hay alguno) y evaluar la función en los extremos del intervalo a y b. El mayor de todos los valores obtenidos es el máximo valor que toma la función en $[a, b]$ y el menor de los valores obtenidos es el menor valor que toma la función en $[a, b]$.

a) Se trata de una función derivable en todo punto. Calculamos sus puntos críticos en el intervalo $[-2, 2]$. Tenemos que:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0 \iff x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{6} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Ambos puntos están en el intervalo $[-2, 2]$. Como $f(-2) = 5$, $f(-4/3) = \frac{203}{27}$ y $f(2) = -11$, se sigue que:

$$\min f([-2, 2]) = \min\{f(-2), f(-4/3), f(2)\} = f(2) = -11,$$

y

$$\max f([-2, 2]) = \max\{f(-2), f(-4/3), f(2)\} = f(-4/3) = \frac{203}{27}.$$

El apartado b) se hace de la misma forma. ☺

Comentarios. En este tipo de ejercicio no hace falta estudiar el crecimiento ni el decrecimiento de la función ni, por supuesto, usar la derivada segunda. Lo que se valora en un ejercicio así es que sepas exponer los resultados que usas para justificar el procedimiento, esto es, que escribas lo que yo he escrito al principio del ejercicio.

Ejercicio 7. Calcula, usando un polinomio de Taylor conveniente, un valor aproximado del número $\sqrt{e}$ con un error menor que 10^{-4}.

Solución. Podemos usar la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$ o la función exponencial $f(x) = e^x$. Como las derivadas de la función exponencial son la misma función parece mejor elegir la función exponencial. Ahora debemos elegir un punto a en el que calcular los polinomios de Taylor y debemos elegirlo por dos condiciones: que el valor de la función y el de sus derivadas se puedan calcular de forma exacta en a, y que a esté suficientemente próximo al punto x en el cual queremos aproximar el valor $f(x)$. Usando la función exponencial tenemos que $x = 1/2$ pues $f(1/2) = e^{1/2} = \sqrt{e}$. Podemos elegir como $a = 0$ que no está lejos de $1/2$ y facilita los cálculos. El polinomio de Taylor de orden n de la función exponencial en $a = 0$ es:

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n$$

El error que se comete al aproximar el valor e^x por $T_n(x)$ es de la forma:

$$\mathrm{e}^x - T_n(x) = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

donde c es un punto comprendido entre 0 y x. En nuestro caso será $0 < c < 1/2$ por lo que $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}} < \sqrt{4} = 2$. Tenemos así que:

$$\left|\sqrt{\mathrm{e}} - T_n(1/2)\right| < \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{2^n}$$

Debemos elegir n por la condición de que $\dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{1}{2^n} < 10^{-4}$. Es fácil comprobar que para ello basta tomar $n = 5$. Por tanto el número:

$$T_5(1/2) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{2^4} + \frac{1}{5!}\frac{1}{2^5}$$

es un valor aproximado de $\sqrt{\mathrm{e}}$ con un error menor que 10^{-4}. Puedes comprobarlo con *Mathematica*.

Si elegimos la función $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, entonces debemos elegir como punto a un número que sea un cuadrado exacto y que esté próximo a e, eso permite más libertad de elección que antes pero en cambio debemos evaluar el polinomio de Taylor en $x = \mathrm{e}$ por lo que solamente podremos calcular su valor exacto de forma simbólica. Probando valores que sean cuadrados exactos cercanos a e parece razonable tomar $a = 2.56 = 1.6^2$. Tenemos que

$$0 < \mathrm{e} - a < 2.76 - 2.56 = 0.2 = \frac{1}{5}.$$

Parece razonable sospechar que un polinomio de Taylor de orden dos o tres será suficiente para obtener lo que queremos. El error que se comete al aproximar $f(x) = \sqrt{x}$ por el polinomio de Taylor de orden 2 de f en a viene dado por:

$$\sqrt{x} - T_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-a)^3 = \frac{1}{2}\frac{-1}{2}\frac{-3}{2}\frac{c^{-5/2}}{3!}(x-a)^3$$

donde c está comprendido entre x y a. Para $a = 2.56$ y $x = \mathrm{e}$ se tiene que $a < c < \mathrm{e}$ y por tanto $\sqrt{a} = 1.6 < \sqrt{c}$. Deducimos que $c^{-5/2} < \left(\frac{10}{16}\right)^5 = \left(\frac{5}{8}\right)^5$. Por tanto:

$$\left|\sqrt{\mathrm{e}} - T_2(\mathrm{e})\right| < \frac{1}{16}\left(\frac{5}{8}\right)^5 \frac{1}{5^3} < \frac{1}{10^4}$$

donde la última desigualdad es fácil de comprobar. Como

$$T_2(x) = a^{1/2} + \frac{1}{2}a^{-1/2}(x-a) - \frac{1}{8}a^{-3/2}(x-a)^2,$$

el número

$$T_1(\mathrm{e}) = 1.6 + \frac{1}{2}\frac{1}{1.6}(\mathrm{e} - 2.56) - \frac{1}{8}\frac{1}{(1.6)^3}(\mathrm{e} - 2.56)^2$$

es una aproximación de $\sqrt{\mathrm{e}}$ con error menor que 10^{-4}. Puedes comprobar con *Mathematica* que si en esta expresión sustituimos e por su valor aproximado 2.7, se sigue obteniendo una aproximación de $\sqrt{\mathrm{e}}$ con error menor que 10^{-4}. ☺